# Solución de problemas I [1]

**Álgebra II Curso 2015-16**

## 1. Proyecciones en el producto escalar estándar

**Ejercicio 7.7.1 (a)** *Dada la ecuación $x + y - z = 0$, dar una base ortonormal del subespacio $U$ de $\mathbb{R}^3$ que define.*

*Solución:* Damos valores a $x$ e $y$ para obtener una base (arbitraria, no ortogonal) de $U$. Así sacamos:

$$U = \left\langle w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Podemos entonces usar Gram–Schmidt para dar una base ortonormal. Primero obtenemos una base ortogonal. El primer vector es $w_1$ y el segundo:

$$\tilde{w}_2 = w_2 - \frac{\langle w_2, w_1 \rangle}{|w_1|^2} w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

Y ahora normalizamos ambos vectores:

$$v_1 = \frac{w_1}{|w_1|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v_2 = \frac{\tilde{w}_2}{|\tilde{w}_2|} = \frac{1}{\sqrt{3/2}} \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La base ortonormal buscada es $\{v_1, v_2\}$.

□

**Ejercicio 7.7.1 (b)** *Dar la imagen del vector $X = (1, 1, 1)$ por la proyección ortogonal a $U$.*

*Solución:* La forma más sencilla de hacerlo (si no nos pidieran luego hacer el proyector), es simplemente:

$$P_U(X) = \langle X, v_1 \rangle v_1 + \langle X, v_2 \rangle v_2 = \sqrt{2} v_1 + \sqrt{\frac{2}{3}} v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

puesto que $\{v_1, v_2\}$ es base ortonormal. Una comprobación que se puede hacer es que efectivamente el vector que hemos obtenido pertenece a $U$, puesto que cumple su ecuación. □

[1] Los ejercicios resueltos son una selección más o menos representativa de los propuestos en las notas de Lucía Contreras. Soluciones por David Alfaya y Álvaro del Pino

**Ejercicio 7.7.1 (c)** *Calcular la forma general del proyector ortogonal a $U$, usando la base ortonormal.*

*Solución:* La expresión que utilizamos en el apartado anterior sirve para obtener el proyector. Si $Y = (y_1, y_2, y_3)$ es un vector cualquiera de $\mathbb{R}^3$, tenemos:

$$P_U(Y) = v_1\langle Y, v_1\rangle + v_2\langle Y, v_2\rangle = (v_1 v_1^T + v_2 v_2^T)Y = \left[\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}(1,0,1) + \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}(-1,2,1)\right] Y =$$

$$\left[\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\right] Y = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} Y$$

Ésta última matriz da $P_U$. Se puede comprobar a ojo que tiene rango 2 y que todas las columnas verifican la ecuación de $U$. Adicionalmente, se puede ver que, al aplicarla a $X$, obtenemos el vector que calculamos en el apartado anterior.

□

**Ejercicio 7.7.1 (c')** *Dar una base ortonormal de $U^\perp$ y usarla para calcular le proyector ortogonal a $U$.*

*Solución:* Puesto que estamos usando el producto escalar estándar de $\mathbb{R}^3$, el vector que genera $U^\perp$ es precisamente el vector de los coeficientes de la ecuación de $U$:

$$U^\perp = \left\langle w_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

y ahora simplemente tenemos que normalizarlo:

$$v_3 = \frac{w_3}{|w_3|} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$\{v_3\}$ es la base ortonormal de $U^\perp$.

Tenemos en general que $Y = P_U(Y) + P_{U^\perp}(Y)$, de forma que:

$$P_U(Y) = Y - P_{U^\perp}(Y) = Y - \langle Y, v_3\rangle v_3 = (I - v_3 v_3^T)Y =$$

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

que coincide con la matriz de arriba. En general, este método requiere menos cálculos. □

**Ejercicio 7.8.1** *Calcular la distancia del vector $X$ al plano $U$.*

*Solución:* Según calculamos arriba

$$P_U(X) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

esto implica que la proyeción al ortogonal es:

$$P_{U^\perp}(X) = X - P_U(X) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

que efectivamente es proporcional a $v_3$. La distancia al plano es la norma de $P_{U^\perp}(X)$:

$$d(X, U) = |P_{U^\perp}(X)| = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

□

# 2. Diagonalización de endomorfismos

**Ejercicio 8.1.1 (c)** *Comprobar que la siguiente matriz diagonaliza:*

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$$

*y dar la matriz diagonalizada y la matriz de cambio de base. Es la matriz invertible? Si así fuera, calcula su inversa usando la matriz diagonalizada.*

*Solución:* Empezamos calculando las raíces del polinomio característico:

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 \\ 6 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 5)(2 + \lambda) + 12 = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$$

Habiendo obtenido dos autovalores distintos y reales, concluimos que la matriz diagonaliza (real). Puesto que ambos autovalores son no cero, concluimos que la matriz es inversible.

La matriz diagonalizada no es otra que:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Para obtener el autovector $v_1$ correspondiente al autovalor 1, lo buscamos en $\ker(A - I)$:

$$A - I = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$$

de forma que tenemos la ecuación $2x = y$; tomamos $v_1 = (1, 2)$. Podemos aplicar $Av_1$ para comprobar que efectivamente nos da $v_1$.

De manera análoga, buscamos en $\ker(A - 2I)$ al autovector $v_2$ del autovalor 2:

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}.$$

Una elección posible es $v_2 = (2, 3)$. Igualmente, vemos que $Av_2 = 2v_2$.

La matriz de cambio de base $C$, i.e. la matriz que verifica $A = C\tilde{A}C^{-1}$, tiene por columnas $\{v_1, v_2\}$:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

la matriz inversa, que da el cambio de la base estándar a la base $\{v_1, v_2\}$, se puede calcular:

$$C^{-1} = -\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Finalmente, podemos calcular su inversa observando que:

$$A^{-1} = (C\tilde{A}C^{-1})^{-1} = C\tilde{A}^{-1}C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 5/2 \end{pmatrix}$$

en este caso no es particularmente útil, siendo una matriz $2 \times 2$. Se puede multiplicar con $A$ para ver que efectivamente es la inversa. □

**Ejercicio 8.1.2** *Calcular la enésima potencia de la matriz dada en el apartado anterior.*

*Solución:* Teniendo la expresión

$$A = C\tilde{A}C^{-1}$$

es inmediato que:

$$A^n = C\tilde{A}^nC^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2^{n+1} \\ 2 & 3\cdot 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+2}-3 & 2-2^{n+1} \\ 3(2^{n+1}-2) & 4-3\cdot 2^n \end{pmatrix}$$

Observad que el cálculo de la inversa en el apartado anterior es un caso particular con $n = -1$.

□

**Ejercicio 8.3.1 (a)** *Decide para qué valores de $a$ y $b$ es el siguiente endomorfismo diagonalizable:*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

*Solución:* Calculamos y factorizamos el polinomio característico:

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & b \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & a-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-a)$$

Esto implica que los autovalores son $\{+1, -1, a\}$. En particular, si $a \neq \pm 1$, la matriz diagonaliza por tener tres autovalores diferentes.

Si $a = \pm 1$, la matriz $A$ podría todavía diagonalizar. Tendríamos entonces un autovalor de multiplicidad 1 y otro de multiplicidad algebraica 2, y tendríamos que comprobar si la multiplicidad geométrica de este último es 2 también.

Hagamos el caso $a = 1$. Entonces:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Y calculamos la dimensión de la imagen de $A-I$:

$$A-I=\begin{pmatrix} -2 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Independientemente de $b$, la imagen tiene dimensión 1. Esto implica que la dimensión de $\ker(A-I)$ es 2, de forma que la multiplicidad geométrica del autovalor 1 es 2. Concluimos que la matriz diagonaliza.

En el caso $a=-1$, tenemos:

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

calculamos $A+I$:

$$A+I=\begin{pmatrix} 0 & 0 & b \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si $b=0$, entonces $\dim(\ker(A+I))=2$, y la matriz diagonaliza. En cambio, si $b\neq 0$, las dos últimas columnas son linealmente independientes, así que $\dim(\ker(A+I))=1$. Puesto que la multiplicidad geométrica del autovalor $-1$ sería 1 y la algebraica 2, la matriz no diagonaliza. $\square$

# 3. Formas de Jordan

## 3.1. Forma de Jordan Real de matrices $3\times 3$

**Ejercicio 10.3.1 (a)** *Hallar la forma de Jordan real de la siguiente matriz:*

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

*Solución:* Comenzamos calculando los autovalores de $A$. Para ello calculamos las raíces del polinomio característico

$$0=|A-\lambda I|=\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ -1 & -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} \overset{F_2'=F_2-F_3}{\underset{\downarrow}{=}} \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & \lambda-2 \\ -1 & -2 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$=(2-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} \overset{F_3'=F_3+2F_2}{\underset{\downarrow}{=}} (2-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$=(2-\lambda)(\lambda^2-2\lambda+2)$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado obtenemos tres autovalores distintos, uno real $\lambda_1=2$ y dos complejos conjugados $\lambda_2=1+i$ y $\lambda_3=1-i=1+(-1)i$. Al tener tres autovalores distintos la matriz es diagonalizable en los complejos, pero como tiene autovalores no reales, no es diagonalizable en los reales. En lugar de su diagonalización, obtenemos la correspondiente forma de Jordan

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Para obtener la base de vectores reales en la que $A$ se expresa con la forma anterior primero necesitamos calcular los autoespacios complejos de $A$, es decir, $\operatorname{Ker}(A-2I)$, $\operatorname{Ker}(A-(1+i)I)$ y $\operatorname{Ker}(A-(1-i)I)$. En primer lugar, $\operatorname{Ker}(A-2I)$ está dado por la ecuación

$$0 = (A-2I)v_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$$

La primera ecuación resulta $x_1 = z_1$ y sustituyendo en la segunda (o tercera) obtenemos $y_1 = 0$, con lo que

$$\operatorname{Ker}(A-2I) \equiv \left\{ \begin{array}{c} x_1 = z_1 \\ y_1 = 0 \end{array} \right\}$$

La dimensión del espacio es 1, con lo que basta encontrar un vector $v_1$ que satisfaga la ecuación, por ejemplo, $v_1 = (1,0,1)$. Para $\lambda_2 = 1+i$, el autoespacio complejo $\operatorname{Ker}(A-(1+i)I)$ está dado por la ecuación

$$0 = (A-(1+i)I)v_2 = \begin{pmatrix} -i & 0 & 1 \\ -1 & -1-i & 1 \\ -1 & -2 & 2-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

La primera ecuación resulta $z_2 = ix_2$. Sustituyendo en la segunda obtenemos

$$y_2 = \frac{i-1}{i+1} x_2 = ix_2 = z_2$$

Por lo tanto, las ecuaciones del autoespacio complejo son

$$\operatorname{Ker}(A-(1+i)I) \equiv \left. \begin{array}{c} z_2 = ix_2 \\ y_2 = z_2 \end{array} \right\}$$

La dimensión del espacio es 1, con lo que basta encontrar un vector complejo $v_2$ que satisfaga la ecuación, por ejemplo, $v_2 = (1,i,i)$. Como la matriz $A$ es real, los vectores de $\operatorname{Ker}(A-(1+i)I)$ y $\operatorname{Ker}(A-(1-i)I)$ son conjugados. Entonces sabemos que conjugando $v_3 = \overline{v_2} = (1,-i,-i)$ es un vector que genera el autoespacio $\operatorname{Ker}(A-(1-i)I)$ sin necesidad de repetir el cálculo anterior para $\lambda_3$.

Finalmente, para obtener la base de Jordan basta separar el autovector complejo $v_2$ en su parte real y su parte imaginaria

$$v_2 = (1,i,i) = (1,0,0) + i(0,1,1) = u + iw$$

Nuestra base de Jordan está dada, entonces, por el primer autovector $v_1$ junto con $u$ y $w$, $B = \{v_1, u, w\} = \{(1,0,1), (1,0,0), (0,1,1)\}$. La relación entre la matriz $A$ y su forma de Jordan real $J$ viene dada por el cambio de base de la base canónica a $B$.

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\square$

## 3.2. Forma de Jordan 2x2

**Ejercicio 10.2.1 (a)** *Comprobar que la siguiente matriz no es diagonalizable y hallar su forma de Jordan y una base de Jordan.*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

*Solución:* Calculamos los autovalores de $A$. Para obtenerlos, buscamos las raíces del polinomio característico

$$0 = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$$

Observamos que existe un único autovalor $\lambda = 1$ con multiplicidad algebraica 2. Buscamos el correspondiente autoespacio $\operatorname{Ker}(A - I)$, que está dado por las ecuaciones

$$0 = (A - I)v = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Luego $\operatorname{Ker}(A - I)$ está dado por la ecuación $x = y$. Tenemos que $\dim \operatorname{Ker}(A - I) = 1 < 2$, con lo que la matriz $A$ no es diagonalizable. Como la multiplicidad geométrica es 1, existe un único bloque de Jordan de orden 2, luego la forma de Jordan de $A$ es

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para encontrar una base de Jordan es suficiente con buscar un vector $v_2 \in \mathbb{R}^2$ tal que $(A-I)v_2 \neq 0$ y completar la base tomando $v_1 = (A - I)v_2$. Por ejemplo, como la primera columna de la matriz $(A - I)$ es distinta de cero, podemos tomar, $v_2 = (1, 0)$ y $v_1 = (A - I)v_2 = (-1, -1)$. Entonces la base de Jordan es $B = \{v_1, v_2\} = \{(-1, -1), (1, 0)\}$. La formad de Jordan y la matriz $A$ están relacionadas por la fórmula de cambio de base

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

□

## 3.3. Forma de Jordan 3x3

**Ejercicio 10.4.1 (a)** *Comprobar que la siguiente matriz no es diagonalizable y hallar su forma de Jordan y una base de Jordan.*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

*Solución:* Comenzamos calculando sus autovalores. Para ello, obtenemos las raíces del polinomio característico

$$0 = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} \overset{\substack{F_1' = F_1 + F_3 \\ \downarrow}}{=} \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1-\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = -(1-\lambda)^3$$

Por lo tanto obtenemos un único autovalor $\lambda = 1$ con multiplicidad algebraica 3. A continuación calculamos el autoespacio correspondiente, es decir, $\mathrm{Ker}(A - I)$, que por definicion está dado por la ecuacion

$$0 = (A - I)v = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Claramente, el espacio está definido por la primera de las ecuaciones, $y = x + z$, con lo que $\dim \mathrm{Ker}(A - I) = 2$ y obtenemos que la multiplicidad geométrica del autovalor 1 es 2. Como $2 < 3$, $A$ no es diagonalizable. $A$ tiene un único autovalor con multiplicidad algebraica 3 y multiplicidad geométrica 2, con lo que la forma de Jordan de $A$ tiene que tener dos bloques correspondientes al autovalor 1. Necesariamente uno debe ser de orden 1 y el otro de orden 2, luego

$$J = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Para obtener una base de Jordan basta tomar $w \in \mathbb{R}^3$ tal que $(A - I)w \neq 0$. Como la primera columna de $(A - I)$ es distinta de 0, basta tomar $w = (1, 0, 0)$. Entonces $v_2 = (A - I)w = (1, 0, -1)$ es un autovalor para el autovector 1. Para completar la base es suficiente con buscar otro vector $v_1 \in \mathrm{Ker}(A - I)$ que no sea proporcional a $v_2$. Por ejemplo, podemos tomar $v_1 = (1, 1, 0)$.

Entonces, una base de Jordan es $B = \{v_1, v_2, w\} = \{(1, 1, 0), (1, 0, -1), (1, 0, 0)\}$. $\square$

**Ejercicio 10.5.1 (a)** *Comprobar que la siguiente matriz no es diagonalizable y hallar su forma de Jordan y una base de Jordan.*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

*Solución:* Comenzamos calculando el polinomio característico y obteniendo sus raíces

$$0 = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & -1 & -2 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} \overset{C_1' = C_1 - C_3}{\overset{\downarrow}{=}} \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & -2 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ \lambda - 1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ -1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} \overset{F_3' = F_3 + F_1}{\overset{\downarrow}{=}} (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 1) = (1-\lambda)^3$$

Por lo tanto, la matriz $A$ tiene un único autovalor $\lambda = 1$ con multiplicidad algebraica 3. Buscamos el correspondiente autoespacio $\mathrm{Ker}(A - I)$, dado por las ecuaciones

$$0 = (A - I)v = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

La última ecuación es equivalente a $x = -z$. Sustituyendo en la segunda obtenemos $y = 0$, luego

$$\mathrm{Ker}(A - I) \equiv \begin{cases} x = -z \\ y = 0 \end{cases}$$

$\dim \mathrm{Ker}(A - I) = 1 < 3$, con lo que $A$ no es diagonalizable. Como la multiplicidad geométrica es 1, su forma de Jordan tiene un único bloque, que entonces debe ser de orden 3, luego

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para obtener una base de Jordan en este caso necesitamos encontrar un vector $v_3 \in \mathbb{R}^3$ tal que $(A - I)^2 v_3 \neq 0$. Después tomamos como los otros dos elementos de la base los vectores $v_2 = (A - I)v_3$ y $v_1 = (A - I)v_2 = (A - I)^2 v_3$. Para ello, un método consiste en calcular la matriz $(A - I)^2$ y buscar una colmuna no nula

$$(A - I)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Como la primera columna es no nula, tomando $v_3 = (1, 0, 0)$ obtenemos los vectores

$$v_2 = (A - I)v_3 = (-2, 1, 1)$$

$$v_1 = (A - I)v_2 = (1, 0, -1)$$

Por lo tanto, la base está dada por $B = \{v_1, v_2, v_3\} = \{(1, 0, -1), (-2, 1, 1), (1, 0, 0)\}$. □

**Ejercicio 10.6.1 (a)** *Comprobar que la siguiente matriz no es diagonalizable y hallar su forma de Jordan y una base de Jordan.*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

*Solución:* Como la matriz es triangular, sabemos que los autovalores son los elementos de la diagonal (ejercicio 8.1.5 de las notas), con lo que tendriamos el autovalor $\lambda_1 = 1$ con multiplicidad algebraica 1 y el autovalor $\lambda_2 = 2$ con multiplicidad algebraica 2. Calculemos los correspondientes autoespacios $\mathrm{Ker}(A - I)$ y $\mathrm{Ker}(A - 2I)$.

Las ecuaciones de $\mathrm{Ker}(A - I)$ son

$$0 = (A - I)v = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

La última ecuación es equivalente a $z = 0$ y sustituyendo en cualquiera de las otras obtenemos $y = 0$, con lo que

$$\mathrm{Ker}(A - I) \equiv \left\{ \begin{array}{c} y = 0 \\ z = 0 \end{array} \right.$$

Podemos obtener una base de este espacio tomando simplemente cualquier vector no nulo que satisfaga la ecuación, por ejemplo, $v_1 = (1, 0, 0)$. Por otro lado, las ecuaciones de $\mathrm{Ker}(A - 2I)$ son

$$0 = (A - 2I)v = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

La segunda ecuación es equivalente a $z = 0$ y sustituyendo en la primera obtenemos $x = -y$, luego

$$\mathrm{Ker}(A - 2I) \equiv \left\{ \begin{array}{c} x = -y \\ z = 0 \end{array} \right.$$

Como $\dim \operatorname{Ker}(A-2I) = 1 < 2$, la matriz $A$ no es diagonalizable. Veamos cuál es la estructura de su forma de Jordan.

1. La multiplicidad geométrica de $\lambda_1 = 1$ es 1, que es igual que su multiplicidad algebraica. Por lo tanto, tiene un bloque de Jordan de orden 1 para el autovalor $\lambda_1 = 1$.
2. La multiplicidad geométrica de $\lambda_2 = 2$ es 1 y su multiplicidad algebraica es 2, luego tiene un bloque de Jordan de orden 2 para el autovalor $\lambda_2 = 2$

Por lo tanto, la forma de Jordan resulta

$$J = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Para obtener la base de Jordan, en primer lugar buscamos un vector no nulo $v_1 \in \operatorname{Ker}(A-I)$. A partir de las ecuaciones del espacio encontramos, por ejemplo $v_1 = (1,0,0)$. Para completar la base de Jordan necesitamos encontrar un vector $v_3$ que esté en $\operatorname{Ker}(A-2I)^2$ pero no en $\operatorname{Ker}(A-2I)$. Las ecuaciones de $\operatorname{Ker}(A-I)^2$ son

$$0 = (A-2I)^2 v = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

con lo que $\operatorname{Ker}(A-2I)^2$ está dado por la ecuación $x+y-4z=0$. Basta encontrar un vector $v_3$ que cumpla esta ecuación pero no alguna de las que definen $\operatorname{Ker}(A-2I)$, por ejemplo, basta encontrar un vector $v_3$ que satisfaga $x+y-4z=0$ con $z \neq 0$. Claramente podemos tomar $v_3 = (4,0,1)$. Finalmente, completamos la base tomando $v_2 = (A-2I)v_3 = (-1,1,0)$. Entonces la base de Jordan es $B = \{v_1, v_2, v_3\} = ((1,0,0), (-1,1,0), (4,0,1)\}$. La relación entre la matriz $A$ y la forma de Jordan se obtiene mediante el cambio de base entre la base canónica y la de Jordan

$$J = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

□

# 4. Espacio euclídeo general

**Ejercicio 7.9.1** *Comprobar que es un producto escalar en $\mathbb{R}^3$ el dado por la expresión*

$$f(x,y) = (x_1+x_2)(y_1+y_2) + (x_1+x_3)(y_1+y_3) + (x_2+x_3)(y_2+y_3)$$

*Utilizando el producto escalar anterior*

*a) Calcular una base ortonormal del subespacio $U = \{x_1 = 0\}$.*

*b) Hallar la matriz en la base canónica de la proyección ortogonal en el plano $U$.*

*c) Hallar la matriz en la base canónica de la simetría ortogonal respecto al plano $U$*

$$S_U(v) = P_U(v) - P_{U^\perp}(v)$$

*Solución:* Para ver que $f$ es un producto escalar debemos comprobar que es simétrico,bilineal, y definido positivo.

- **Simétrico**:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= (x_1+x_2)(y_1+y_2)+(x_1+x_3)(y_1+y_3)+(x_2+x_3)(y_2+y_3) \\ &= (y_1+y_2)(x_1+x_2)+(y_1+y_3)(x_1+x_3)+(y_2+y_3)(x_2+x_3) = f(y,x) \end{aligned}$$

- **Bilineal**: Como $f$ es simétrico, para ver que es bilineal únicamente es necesario comprobar que es lineal en la primera (o segunda) variable, es decir, que $f(ax+by,z) = af(x,z) + bf(y,z)$.

$$\begin{aligned} f(ax+by,z) &= (ax_1+by_1+ax_2+by_2)(z_1+z_2)+(ax_1+by_1+ax_3+by_3)(z_1+z_3) \\ &\quad + (ax_2+by_2+ax_3+by_3)(z_2+z_3) \\ &= a\left[(x_1+x_2)(z_1+z_2)+(x_1+x_3)(z_1+z_3)+(x_2+x_3)(z_2+z_3)\right] \\ &\quad + b\left[(y_1+y_2)(z_1+z_2)+(y_1+y_3)(z_1+z_3)+(y_2+y_3)(z_2+z_3)\right] = af(x,z)+bf(y,z) \end{aligned}$$

- **Definido positivo**: Como el cuadrado de un número real es siempre mayor o igual que cero tenemos que

$$f(x,x) = (x_1+x_2)^2+(x_1+x_3)^2+(x_2+x_3)^2 \geq 0$$

Si $f(x,x)=0$, entonces como cada uno de los sumandos anteriores es mayor o igual que 0, los tres deben ser 0 y, por lo tanto

$$\left.\begin{array}{ccccc} x_1 & + & x_2 & & = 0 \\ x_1 & + & & x_3 & = 0 \\ & & x_2 & + \; x_3 & = 0 \end{array}\right\} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

Como el rango de la matriz anterior es 3, la única solución es $x=0$.

Una vez hemos comprobado que $f$ define un produto escalar, resolvamos los otros apartados.

a) Para calcular una base ortonormal del subespacio utilizamos el metodo de Gram-Schmidt. Comenzamos por obtener una base cualquiera de $U = \{x_1 = 0\}$. Por ejemplo, $\{e_1, e_2\} = \{(0,1,0),(0,0,1)\}$. Tomamos

$$u_1 = e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$u_2 = e_2 - P_{\langle u_1 \rangle}(e_2) = e_2 - \frac{f(e_2,u_1)}{f(u_1,u_1)}u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\{u_1, u_2\}$ es una base ortogonal de $U$. Para obtener una base ortonormal normalizamos los vectores de la base anterior

$$v_1 = \frac{u_1}{\sqrt{f(u_1,u_1)}} = \frac{1}{\sqrt{(0+1)^2+(0+0)^2+(1+0)^2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v_2 = \frac{u_2}{\sqrt{f(u_2,u_2)}} = \frac{1}{\sqrt{(0-1/2)^2+(0+1)^2+(-1/2+1)^2}}\begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

La base ortonormal buscada es $\{v_1, v_2\}$. Podemos ver que $f(v_1,v_2)=0$.

b) *Solución 1: Proyección usando una base ortonormal de $U$*

Una forma cómoda de proceder es trabajar con la matriz $F$ correspondiente a $f$. En la entrada $a_{ij}$ tiene el coeficiente del monomio $x_i y_j$ en $f$:

$$F = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Efectivamente, se puede ver que

$$f(x,y) = x^T F y = (x_1, x_2, x_3) F \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Ahora, procedemos igual que hicimos en el capítulo de proyectores para el producto escalar estándar. Lo único que tenemos que recordar es que cualquier cálculo que hagamos de productos escalares o normas se hace con $F$. Entonces:

$$P_U(X) = f(X,v_1)v_1 + f(X,v_2)v_2 = v_1 v_1^T F X + v_2 v_2^T F X = (v_1 v_1^T + v_2 v_2^T) F X =$$

$$\left[ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} (0,1,0) + \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} (0,-1,2) \right] \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} X =$$

$$\left[ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} X =$$

$$\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} X = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} X$$

y podemos comprobar que efectivamente esta matriz tiene rango 2 y sus columnas verifican la ecuación de $U$.

*Solución 2: Proyección usando una base ortogonal sin calcular $F$*

Si $\{u_1, u_2\}$ es una base ortogonal (no necesariamente ortonormal) de $U$, podemos calcular la proyección tomando

$$P_U(X) = \frac{f(X,u_1)}{f(u_1,u_1)} u_1 + \frac{f(X,u_2)}{f(u_2,u_2)} u_2$$

Tomando la base $\{u_1, u_2\} = \{(0,1,0), (0,-1/2,1)\}$ calculada en el apartado anterior tenemos que

$$P_U(x,y,z) = \frac{f((x,y,z),(0,1,0))}{f((0,1,0),(0,1,0))}(0,1,0) + \frac{f((x,y,z),(0,-1/2,1))}{f((0,-1/2,1),(0,-1/2,1))} =$$

$$\frac{(x+y)\cdot 1 + (x+z)\cdot 0 + (y+z)\cdot 1}{2}(0,1,0) + \frac{(x+y)\cdot(-\frac{1}{2}) + (x+z)\cdot 1 + (y+z)\cdot \frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} \left(0, \frac{1}{2}, 1\right)$$

$$= \frac{x+2y+z}{2}(0,1,0) + \left(\frac{x}{3} + z\right)\left(0, \frac{1}{2}, 1\right) = \left(0, \frac{x}{3} + y, \frac{x}{3} + z\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, la matriz de $P_U$ en la base canónica es

$$P_U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

*Solución 3: Proyección usando la proyección al ortogonal*

Dada la base (no necesariamente ortogonal) $\{e_1, e_2\}$ de $U$, tenemos que

$$U^\perp = \{x \in \mathbb{R}^3 | f(x,u) = 0, \forall u \in U\} = \{x \in \mathbb{R}^3 | f(x, e_1) = f(x, e_2) = 0\}$$

Por lo tanto, sustituyendo en la expresión de $f$, las ecuaciones de $U^\perp$ son

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = f((x,y,z),(0,1,0)) = (x+y)\cdot 1 + (x+z)\cdot 0 + (y+z)\cdot 1 = x+2y+z \\ 0 = f((x,y,z),(0,0,1)) = (x+y)\cdot 0 + (x+z)\cdot 1 + (y+z)\cdot 1 = x+y+2z \end{array} \right. \equiv \left\{ \begin{array}{r} y = z \\ x = -3y \end{array} \right.$$

Luego $U^\perp$ tiene dimensión 1 y para dar una base ortogonal basta obtener cualquier vector no nulo $v$ que satisfaga las ecuaciones anteriores. Por ejemplo, $v = (3, -1, -1)$. Como $\mathbb{R}^3 = U \oplus U^\perp$ tenemos que para todo $X \in \mathbb{R}^3$, $X = P_U(X) + P_{U^\perp}(X)$, con lo que $P_U(X) = X - P_{U^\perp}(X)$. De esta forma, tenemos que

$$\begin{aligned} P_U(x,y,z) &= (x,y,z) - P_{U^\perp}(x,y,z) = (x,y,z) - P_{\langle v \rangle}(x,y,z) \\ &= (x,y,z) - \frac{f((x,y,z),(3,-1,-1))}{f((3,-1,-1),(3,-1,-1))}(3,-1,-1) \\ &= (x,y,z) - \frac{(x+y)\cdot 2 + (x+z)\cdot 2 + (y+z)\cdot(-2)}{2^2+2^2+(-2)^2}(3,-1,-1) \\ &= (x,y,z) - \frac{x}{3}(3,-1,-1) = \left(0, \frac{x}{3}+y, \frac{x}{3}+z\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

c) De forma análoga al apartado anterior, tenemos que $P_{U^\perp} = I - P_U$. Por lo tanto,

$$S_U = P_U - P_{U^\perp} = P_U - (I - P_U) = 2P_U - I = 2\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2/3 & 1 & 0 \\ 2/3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

□