Solución de problemas III [1]

Álgebra II Curso 2015-16

1. Espacio Afín

1.1. Ejercicios

Ejercicio 11.4.3 *Encontrar la expresión analítica de las siguientes aplicaciones afines de* $\mathbb{R}^2$*:*

a) Giro de centro $(1,1)$ *y ángulo* $\pi/2$

b) Proyección ortogonal sobre la recta de ecuación $x+y=1$

c) Simetría ortogonal respecto a la recta $x+y=1$

d) Composición de la simetría con el giro anteriormente calculados

Solución:

a) Sea f el giro solicitado y $\tilde{f}$ su aplicación lineal asociada. La aplicación lineal asociada a un giro afín es claramente una rotación en $\mathbb{R}^2$. Por lo tanto, sabemos que su matriz en la base canónica está dada por

$$\tilde{f} = \begin{pmatrix} \cos(\pi/2) & -\sin(\pi/2) \\ \sin(\pi/2) & \cos(\pi/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces la expresión analítica de f es de la forma

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

para un cierto punto $(a_1,a_2) = f(O)$. Para obtenerlo basta considerar la imagen de cualquier punto y despejar, ya que, por ser f una transformación afín, para cualquier punto P se cumple que

$$f(O) = f(P) - \tilde{f}(\overrightarrow{OP})$$

Por ejemplo, en nuestro caso sabemos que el punto $P=(1,1)$ es fijo, ya que la aplicación es una rotación alrededor de este punto. Por lo tanto, $f(P)=P$ y tenemos que

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = f(P) - \tilde{f}(\overrightarrow{OP}) = f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, sustityendo obtenemos

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

[1] Los ejercicios resueltos son una selección más o menos representativa de los propuestos en las notas de Lucía Contreras. Soluciones por David Alfaya y Álvaro del Pino

b) Sea r la recta de ecuación $x+y=1$. Llamemos P_r a la proyección buscada y $\tilde{P}_r$ a su aplicación lineal asociada. La aplicación lineal asociada a la simetría es claramente la simetría ortogonal respecto a la recta $U=\{x+y=0\}\subset\mathbb{R}^2$. Dado que U es una recta, para calcular la proyección P_U podemos considerar cualquier vector que la genere, por ejemplo $v=(1,-1)$, y tomar

$$\tilde{P}_r\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P_U\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{|(1,-1)|^2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}(1,-1)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, la expresión analítica de P_r es de la forma

$$P_r\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Donde $(a_1,a_2)=P_r(O)=P_r(P)-\tilde{P}_r(\overrightarrow{OP})$ para cualquier punto $P\in\mathcal{A}_2$. Los puntos de la recta r quedan fijos por la proyección. En particular, tomando $P=(1,0)\in r$ tenemos que $P_r(1,0)=(1,0)$, luego

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = P_r(P)-\tilde{P}_r(\overrightarrow{OP}) = P_r\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

De esta forma, sustityendo obtenemos que

$$P_r\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

c) Al igual que antes, sea r la recta de ecuación $x+y=1$. Sea S_r la simetría buscada y $\tilde{S}_r$ su aplicación lineal asociada.

Método 1: La aplicación lineal asociada a la simetría es la simetría ortogonal respecto al subespacio vectorial $U=\{x+y=0\}\subset\mathbb{R}^2$. Por lo tanto, sabemos que la matriz de la aplicación lineal $\tilde{S}_U$ en la base canónica está dada por

$$\tilde{S}_r = S_U = P_U - P_{U^\perp} = 2P_U - I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, la expresión analítica de S_r es de la forma

$$S_r\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Donde $(a_1,a_2)=S_r(O)=S_r(P)-\tilde{S}_r(\overrightarrow{OP})$ para cualquier punto $P\in\mathcal{A}_2$. De forma analoga al apartado anterior, los puntos de la recta r quedan fijos por la simetría. Tomando $P=(1,0)\in r$ tenemos que $S_r(1,0)=(1,0)$, luego

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = S_r(P)-\tilde{S}_r(\overrightarrow{OP}) = S_r\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

De esta forma

$$S_r\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Método 2: Podemos deducir la expresión de la simetría a partir de la expresión afín de la proyección obtenida en el apartado anterior. Para ello, basta con que nos demos cuenta de que para todo $P\in\mathcal{A}_2$

$$S_r(P) = P + 2\overrightarrow{PP_r(P)} = P + 2(P_r(P)-P) = 2P_r(P) - P$$

Por lo tanto, sustityendo la expresión analítica de P_r tenemos que

$$S_r\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2\left[\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right] - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

d) Para obtener la composición basta considerar la composición de las correspondientes expresiones analíticas

$$
\begin{aligned}
(S_r \circ f)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= S_r\left(f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = S_r\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right] \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

□

Ejercicio 11.6.1.b *Clasifica el movimiento de $\mathbb{R}^3$ dado por la siguiente expresión:*

$$
A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & 4 & -4 \\ 4 & 1 & 8 \\ -4 & 8 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

y da el vector de deslizamiento.

Solución: Observemos que la traza es 1 y el determinante es -1, de forma que el movimiento ortogonal Q asociado es una reflexión respecto a un plano. Dicho plano π viene dado por los autovectores de autovalor 1, que calculamos:

$$
\pi = \ker(Q - Id) = \ker(9Q - 9Id) = \ker\left[\begin{pmatrix} 7 & 4 & -4 \\ 4 & 1 & 8 \\ -4 & 8 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}\right] =
$$

$$
\ker\begin{pmatrix} -2 & 4 & -4 \\ 4 & -8 & 8 \\ -4 & 8 & -8 \end{pmatrix} = \{-x + 2y - 2z = 0\}
$$

Si éste es el plano que da la reflexión Q, uno paralelo es el que corresponde a la transformación A.

Entonces, el vector $(1,1,1)$ se descompone en dos partes, su proyección $P_\pi((1,1,1))$ al plano π y su proyección $P_{\pi^\perp}((1,1,1))$ a la recta ortogonal al plano. La primera proyección es precisamente el vector deslizamiento D. Lo más sencillo es calcular la segunda proyección y luego restar. Puesto que la recta viene generada por el vector $(-1,2,-2)$ tenemos:

$$
P_{\pi^\perp}((1,1,1)) = \frac{\langle (1,1,1), (-1,2,-2)\rangle}{|(-1,2,-2)|^2}(-1,2,-2) = \frac{1}{9}(1,-2,2)
$$

$$
D = P_\pi((1,1,1)) = (1,1,1) - P_{\pi^\perp}((1,1,1)) = \frac{1}{9}(8,11,7)
$$

Ahora podemos calcular fácilmente qué plano paralelo a π es el que deja fijo A. Fijaos que hemos descompuesto A en dos partes. Una de ellas es la reflexión respecto a un plano dada por $\widetilde{A} = Q(x,y,z) + P_{\pi^\perp}((1,1,1))$ y la otra es el deslizamiento D. El plano que deja fijo A es el plano que $\widetilde{A}$ deja fijo punto a punto. Una forma de sacarlo es observar que pasa por el punto medio del segmento que une $(0,0,0)$ con su imagen $\widetilde{A}(0,0,0) = P_{\pi^\perp}((1,1,1)) = \dfrac{1}{9}(1,-2,2)$.

Este punto medio es $M = \frac{1}{18}(1, -2, 2)$. Si ahora evaluamos la expresión $-x + 2y - 2z$ en M, tenemos que nos da: $\frac{1}{18}(-1 - 2 \times 2 - 2 \times 2) = -1/2$. Esto significa que el plano que A deja fijo es $\{-x + 2y - 2z = -1/2\}$.

$\square$

Ejercicio 11.6.1.k *Clasifica el movimiento de $\mathbb{R}^3$ dado por la siguiente expresión:*

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y da el vector de deslizamiento.

Solución: Puesto que la matriz tiene determinante 1 y traza 0, el movimiento ortogonal Q asociado a A es un giro cuyo ángulo θ verifica:

$$0 = tr(A) = 1 + 2\cos(\theta); \qquad \cos(\theta) = -1/2$$

De forma que A o bien describe una rotación vectorial (si el vector desplazamiento es cero) o un movimiento helicoidal (si no lo es).

Queremos determinar cuál es el plano que fija Q (no punto a punto) y cuál es su eje. Podemos encontrar el eje L buscando los autovectores de autovalor 1:

$$L = \ker(Q - Id) = \ker\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] =$$

$$\ker\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \{-x + y = 0; y + z = 0\} = \langle(1, 1, -1)\rangle$$

Así que L está generado por el vector $u_1 = (1, 1, -1)$ y el plano fijado por Q es su ortogonal. Este plano y sus paralelos los fija A también, pero no punto a punto.

El deslizamiento es paralelo a L. Esto significa que se corresponde a $P_L(2, 1, 0)$:

$$D = P_L(2, 1, 0) = \frac{\langle(2, 1, 0), (1, 1, -1)\rangle}{|(1, 1, -1)|^2}(1, 1, -1) = (1, 1, -1)$$

esto significa que A es un movimiento helicoidal. A entonces descompone como un giro vectorial $\widetilde{A}$ dado por $Q(x, y, z) + P_{L^\perp}(2, 1, 0)$ más el deslizamiento dado por D. Aquí:

$$P_{L^\perp}(2, 1, 0) = (2, 1, 0) - P_L(2, 1, 0) = (1, 0, 1)$$

Ahora podemos determinar θ. La forma de hacerlo es la de siempre. Tomemos una base ortogonal de $L^\perp$:

$$u_2 = (-1, 1, 0); \qquad u_3 = (1, 1, 2)$$

y nos aseguramos de que (u_1, u_2, u_3) es una base bien orientada. Ahora vemos que el producto escalar $\langle u_3, Qu_2\rangle = \langle(1, 1, 2), (1, 0, 1)\rangle = 3$ es positivo, de forma que el giro tiene ángulo positivo. Por tanto, $\theta = 2\pi/3$.

Finalmente, queremos saber cuál es el eje del movimiento helicoidal (esto es, la recta que queda fija, pero no punto a punto). Una forma de sacarlo es la siguiente. Digamos que un punto del eje tiene coordenadas (a, b, c). Entonces, el giro vectorial $\widetilde{A}$ se puede obtener haciendo primero una translación al origen $(x, y, z) \to (x - a, y - b, z - c)$, luego aplicando el giro Q y luego trasladando de vuelta. Esto quiere decir:

$$Q(x, y, z) + P_{L^\perp}(2, 1, 0) = \widetilde{A}(x, y, z) = Q[(x, y, z) - (a, b, c)] + (a, b, c)$$

lo cual implica:

$$(1, 0, 1) = P_{L^\perp}(2, 1, 0) = (a, b, c) - Q(a, b, c) = (Id - Q)(a, b, c)$$

y esto nos da las ecuaciones:

$$1 = a - b; \qquad 0 = b + c; \qquad 1 = a + c$$

y una solución posible es

$$a = 0; \qquad b = -1; \qquad c = 1$$

Esto nos dice que el eje es $(0, -1, 1) + \lambda(1, 1, -1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. $\square$

1.2. Clasificación de movimientos en $\mathcal{A}_2$

Tipo	**Transformación lineal ortogonal**	**Determinante/Traza**	**Puntos fijos**
Traslación	Identidad	$\det(A) = 1$ $\mathrm{tr}(A) = 2$	Ninguno
Giro alrededor de un punto	Rotación	$\det(A) = 1$ $\mathrm{tr}(A) = 2\cos(\varphi)$	Centro de giro
Simetría respecto a una recta	Simetría respecto a una recta	$\det(A) = -1$ $\mathrm{tr}(A) = 0$	Eje de simetría
Simetría con deslizamiento	Simetría respecto a una recta	$\det(A) = -1$ $\mathrm{tr}(A) = 0$	Ninguno

1.3. Clasificación de movimientos en $\mathcal{A}_3$

Tipo	**Transformación lineal ortogonal**	**Determinante/Traza**	**Puntos fijos**
Traslación	Identidad	$\det(A) = 1$ $\mathrm{tr}(A) = 3$	Ninguno
Giro alrededor de una recta	Rotación vectorial	$\det(A) = 1$ $\mathrm{tr}(A) = 1 + 2\cos(\varphi)$	Eje de giro
Movimiento helicoidal	Rotación vectorial	$\det(A) = 1$ $\mathrm{tr}(A) = 1 + 2\cos(\varphi)$	Ninguno
Composición de giro con $\varphi \neq 0$ con simetría respecto a un plano perpendicular al eje	Composición de rotación vectorial con $\varphi \neq 0$ y simetría	$\det(A) = -1$ $\mathrm{tr}(A) = -1 + 2\cos(\varphi)$	Intersección del eje de giro y el plano de simetría
Simetría respecto a un plano	Simetría respecto a un plano	$\det(A) = -1$ $\mathrm{tr}(A) = 1$	Plano de simetría
Simetría con deslizamiento respecto a un plano	Simetría respecto a un plano	$\det(A) = -1$ $\mathrm{tr}(A) = 1$	Ninguno
Simetría respecto a una recta	Simetría respecto a una recta	$\det(A) = 1$ $\mathrm{tr}(A) = -1$	Eje de simetría
Simetría con deslizamiento respecto a una recta	Simetría respecto a una recta	$\det(A) = 1$ $\mathrm{tr}(A) = -1$	Ninguno